早稲田大学大学院 基幹理工学理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Initial Value Problems of the Equations for Compressible and Incompressible Viscous Fluids

圧縮性及び非圧縮性粘性流体の方程式系の初期値問題

申 請 者

Keiichi WATANABE

渡邉 圭市

数学応用数理専攻 偏微分方程式研究

2019 年 12 月

本博士論文では，圧縮性粘性流体および非圧縮性粘性流体の挙動を記述する方程式系の初期値問題の解の存在と一意性について考察する．特に，全空間$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$における Navier－Stokes－Korteweg 方程式の時間大域適切性，外部 Lipschitz 領域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$における Stokes 作用素の最大正則性と 3 次元非圧縮性 Navier－Stokes 方程式のスケール不変な関数空間 $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$ での mild solution の存在および境界が滑らかな領域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$における相転移を伴う圧縮性・非圧縮性粘性流体の自由境界問題の適切性について考察する．いずれも自然科学に現れる方程式系であり，数学のみならず，物理学や流体工学，地球惑星学といった流体および流体中での物体の運動を研究する各分野で重要な役割を果たしている．

圧縮性粘性流体とは流体の運動の間，密度変化を許容するような流体であり，もし流体が Newton 流体である場合は圧縮性 Navier－Stokes 方程式によって流体の運動を記述できることが知られている．本論文で扱う Navier－Stokes－Korteweg 方程式とは，圧縮性 Navier－Stokes 方程式に毛管現象の効果を加味した数理モデルであり，応力テンソルに密度の勾配項が含まれる点が特徴的である．実際に，Navier－Stokes－Korteweg 方程式は応力テンソルが

$$\mathbf{T} = 2\mu\,\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) + (\nu - \mu)\,(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,\mathbf{I} + \frac{\kappa}{2}(\Delta\,\rho^2 - |\nabla\rho|^2)\,\mathbf{I} - \kappa\,\nabla\rho \otimes \nabla\rho$$

と与えられる流体の挙動を記述する．ここで，$\boldsymbol{v}$および ρ はそれぞれ流体の速度場，単位体積あたりの質量密度，$\mu,\ \nu$ は粘性係数，κ は毛管現象係数である．特に，$\kappa \equiv 0$ の場合は通常の圧縮性 Navier－Stokes 方程式を表す．この方程式系はもともと Korteweg（1901）が水・水蒸気の相転移の構造を解析するために導入したものであり，Dunn－Serrin（1985）によって定式化された．近年では，二相流体の拡散界面モデルの一つとして，数値解析などで用いられている（Anderson ら，1998）．本論文では，この方程式系の時間大域解の一意存在を時間L^p空間L^qの枠組みで示す．ここで，本論文で得られる結果は，従来の時間L^2空間L^2枠の結果を含む．これまでに知られている Navier－Stokes－Korteweg 方程式の時間大域解に関する結果は，初期値が空間変数に関してL^2可積分であることを仮定しており，エネルギー法に頼った証明がほとんどである．一方，本論文では，エネルギー法を使うことなく，作用素$-\Delta$が最大正則性を持つことと Mikhlin 型のフーリエ・マルチプライヤー定理を組み合わせることで，必ずしもL^2可積分とは限らない，より一般の可積分性を持つ初期値に対して Navier－Stokes－Korteweg 方程式の時間大域解を構成する．特に，Navier－Stokes－Korteweg 方程式の線型化問題の最大正則性評価式を導出し，Banach の不動点定理を用いて適切な関数空間に属する強解を構成する．特に，応力テンソルに含まれる密度の勾配項により，空間変数に関する密度関数の正則性が従来の圧縮性 Navier－Stokes 方程式の場合に比べて高くなり，密度関数に関する可微分性の損失が生じないので，Picard の逐

次近似法により非線型問題の解を構成することが可能である．

密度が時間や空間に依らず一様な定数である場合，流体の質量密度に代わって圧力を未知関数として Navier－Stokes 方程式を扱う．本論文では，斉次 Dirichlet 境界条件を伴う外部 Lipschitz 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ における Stokes 方程式および 3 次元非圧縮性 Navier－Stokes 方程式の可解性について論じる．ここで，非圧縮性 Navier－Stokes 方程式には圧力項に関する時間発展の方程式がない上に非圧縮条件が含まれるので，方程式系の可解性を調べる上で Lebesuge 空間 $\mathrm{L}^p(\Omega)$ の Helmholtz 分解を考えることが有効であることが知られている．領域 Ω が有界 Lipschitz 領域の場合は，ある正定数 ε が存在して，条件

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}+\varepsilon \tag{A}$$

を満たす任意の p に対して，$\mathrm{L}^p(\Omega)$ の Helmholtz 分解が存在する（Fabes ら，1998）．ただし，ε は Lipschitz 領域 Ω の形状のみに依存し，領域 Ω の体積とは独立な定数である．一方，Ω が外部 Lipschitz 領域の場合は，ある正定数 ε が存在して，

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| < \min\left(\frac{1}{6}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\frac{1}{d}\right) \tag{B}$$

を満足するすべての p に対して，$\mathrm{L}^p(\Omega)$ の Helmholtz 分解が存在することが Lang－Méndez (2006) によって示されていたが，この条件(B)は条件(A)よりも強いものになっている．実際に，$d=3$ としたとき，条件(A)は $p = 3$ の場合を含むが，条件(B)は含まない．そのため，Lang－Méndez (2006) の結果を用いて，3 次元非圧縮性 Navier－Stokes 方程式の mild solution の存在を関数空間 $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$ で考えることは非常に難しい．そこで，本論文では，$\mathrm{div}\, u$ を零拡張したものの Newton ポテンシャルの gradient ではなく，u を U に零拡張し，$\mathcal{F}^{-1}[\xi \otimes \xi\, |\xi|^{-2}\mathcal{F}[U](\xi)](x)$ を考えることで，Lang－Méndez (2006) の結果を改良し，条件(A)を満たす任意の p に対し $\mathrm{L}^p(\Omega)$ の Helmholtz 分解が存在することを示す．ここで，$\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ Fourier 変換とその逆変換を表す．さらに，条件(A)を満たすすべての p に対しストークス作用素 A_p が最大正則性をもつことと，$-A_p$ が有界解析半群（Stokes 半群）を生成することを Geissert ら (2012) の手法を用いて証明する．ただし，Geissert ら (2012) の方法では，Stokes 半群の有界性までは明らかにできないので，岩下 (1989) の手法と Fredholm の理論を援用することで Stokes 半群の有界性を示す．なお，本論文で行われる議論は，境界が滑らかな外部領域における Stokes 作用素の最大正則性を扱った Solonnikov (1977) や Giga－Sohr (1989, 1991) とは全く異なる．また，Stokes 半群の $\mathrm{L}^p-\mathrm{L}^q$ 評価等からスケール不変な関数空間 $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$ での mild solution の存在を儀我（1986）の方法により示す．

海上で発生する波のように，自然現象にあらわれる現れる流体はその占める領域が時刻によって変化することが多い．このように，時刻に依存する領域で発展方程式を考える問題を自由境界問題という．本論文では，流体工学や地球惑星学等で関心の高い，圧縮性粘性流体と非圧縮性粘性流体の二相流の自由境界問題の定式化およびその適切性の証明を行う．特に，自由界面上で（一次）相転移と表面張力が発生している場合について扱う．ここで，相転移とは，物質が気体から液体や固体へ，あるいはその逆に状態変化する物理現象を指す．このような二相流の自由境界問題は，例えば，海と大気の運動，大気中の液滴の運動，水中の気泡の運動などの数理モデルである．熱力学第二法則に矛盾しない，非圧縮性粘性流体と非圧縮性粘性流体の二相流の自由境界問題の研究は Prüss ら(2012) によって始められ，時間局所・大域適切性などについて明らかになっている．一方で，圧縮性粘性流体と非圧縮性粘性流体の二相流の自由境界問題は久保ら (2014) や柴田(2016)，Solonnikov (2019) によって研究されている．特に，柴田(2016) は自由境界面上で表面張力と相転移が生じている場合について扱ったが，自由境界面上で圧縮性粘性流体の密度関数について可微分性の損失が生じているため，非線型問題の適切性を示すことが困難である．ここでいう適切性とは，方程式系の解が一意的に存在し，解が初期値に関して連続であることを指す．そこで本論文では，圧縮性粘性流体を記述する方程式として，圧縮性 Navier－Stokes 方程式の代わりに，前述の Navier－Stokes－Korteweg 方程式を用いた新しい方程式系を定式化する．特に，エントロピー増大則が成り立つための十分条件を考え，自由境界の跳び条件を定式化する．この方程式系は，従来の Navier－Stokes－Fourier 方程式系の拡張とみなすことができる．さらに，本論文では，半沢(1981) の手法に従って，自由境界領域に対応する固定境界領域における非線型問題の可解性を主に調べ，方程式系の適切性の証明を行う．ただし，初期値は適当なノルムで小さいことを仮定する．

本論文の構成とその概要について述べる．第一章では，Navier－Stokes－Korteweg 方程式，非圧縮性 Navier－Stokes 方程式および相転移を伴う二相流体の自由境界問題の物理的背景やその研究に関する歴史を述べた後に，本論文を通して用いられる記法や関数空間，補題，命題等を挙げる．第二章では，全空間 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$における Navier－Stokes－Korteweg 方程式の時間大域適切性について論じる．第三章では，外部 Lipschitz 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$における Stokes 作用素 A_p が最大正則性をもつことと作用素 $-A_p$ が有界解析半群（Stokes 半群）を生成することを示す．また，Stokes 半群の $\mathrm{L}^p-\mathrm{L}^q$ 評価等を導出し，その結果非圧縮性 Navier－Stokes 方程式のスケール不変な関数空間 $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$での mild solution が得られることを証明する．第四章では，相転移を伴う圧縮性・非圧縮性粘性二相流体を記述する方程式系を定式化し，その適切性について考察する．

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　渡邊圭市　　印

（2020 年 1 月 24 日現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	○ K. Watanabe, Compressible-incompressible two-phase flows with phase transition: model problem, J. Math. Fluid Mech., 20 (2018), no. 3, 969-1011. ○ K. Watanabe, Strong solution to compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions, Nonlinear Anal. Real World Appl., 54 (2020), 103101.
報告集	渡邊圭市, On the local solvability of compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions in general domains, 第 40 回発展方程式若手セミナー報告集 (2018), 237-244.
国際会議 口頭発表	K. Watanabe, Maximal regularity theorem of compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions, The 15th Japanese-German international Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2018 年 1 月. K. Watanabe, On strong solutions for compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions, 早稲田大学, 2018 年 3 月. K. Watanabe, Local unique solvability for compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Evangelische Akademie（ドイツ）, 2018 年 5 月. K. Watanabe, Maximal regularity of the Stokes operator in exterior Lipschitz domains, Internal Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling, and Numerics, 早稲田大学, 2019 年 11 月. K. Watanabe, The Stokes operator in exterior Lipschitz domains, Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid, 京都大学数理解析研究所, 2019 年 11 月.
国内学会 口頭発表	渡邊圭市, Compressible-incompressible two phase flow of Korteweg type with phase transition: model problem, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年 9 月. 渡邊圭市, Maximal regularity of compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions, 日本数学会 2018 年度年会, 東京大学, 2018 年 3 月. 渡邊圭市, Global solvability of compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions and surface tensions in bounded domains, 日本数学会 2019 年度年会, 東京工業大学, 2019 年度 3 月. P. Tolksdorf, 渡邊圭市, Navier-Stokes equations in exterior Lipschitz domains, 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会, 金沢大学, 2019 年 9 月.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
セミナー等の発表	K. Watanabe, Compressible-incompressible two-phase flows with phase transition: model problem, Weekly Seminars in IRTG 1529, Technical University Darmstadt（ドイツ）, 2017 年 10 月. 渡邊圭市, Maximal Lp-Lq regularity of compressible-incompressible two-phase flows with phase transitions in general domains, 第 43 回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2017 年 12 月. 渡邊圭市, 相転移を伴う圧縮性・非圧縮性粘性 2 相流体のモデリングと数学解析, 早稲田大学重点領域研究機構 熱エネルギー変換工学・数学融合研究所 第 1 回シンポジウム『工学と数学の融合に向けて』, 早稲田大学, 2018 年 4 月. 渡邊圭市, Free boundary problem of compressible and incompressible two-phase flows with surface tensions and phase transitions in bounded domains, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学, 2019 年 1 月. 渡邊圭市, 相転移を伴う圧縮性・非圧縮性粘性二相流の自由境界問題, 東北大学 OS 特別セミナー, 東北大学, 2019 年 5 月.
研究プログラム参加	日独共同大学院プログラム「流体数学」, Technical University of Darmstadt（ドイツ）, 2017 年 10 月--2017 年 12 月. EPSRC Center for Doctoral Training in the Mathematics of Planet Earth, Imperial College London（イギリス）, 2018 年 9 月--2018 年 12 月.